ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ …………………..
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

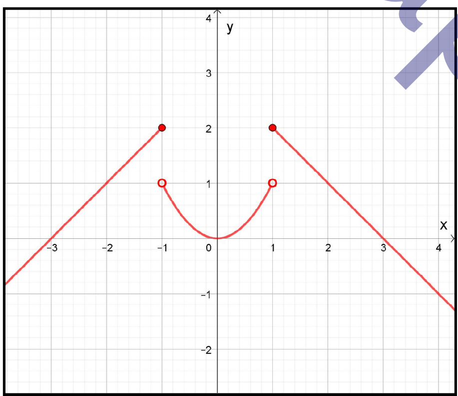
Α1) Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

(Μονάδες 7)

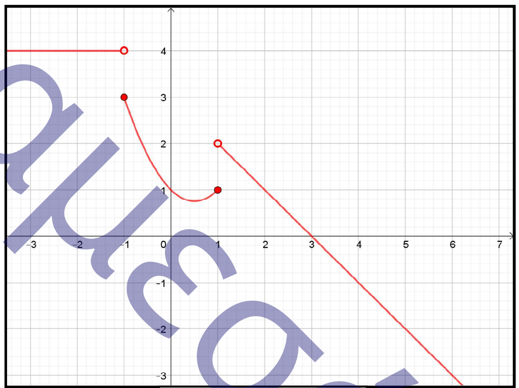
Α2) Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Bolzano.

(Μονάδες 4)

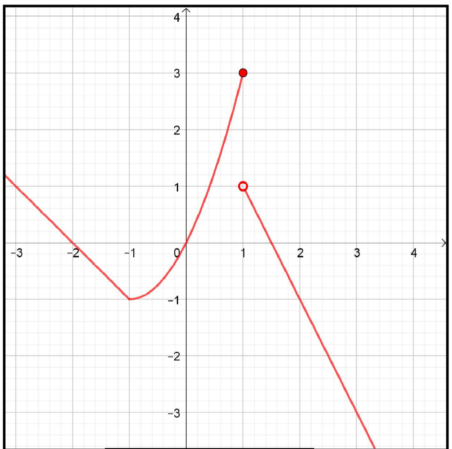
Α3) Ποιες από τις συναρτήσεις f, g, h, k των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα παρακάτω σχήματα είναι συνεχείς στο $[-1,1]$; Δικαιολογήστε σύντομα σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.



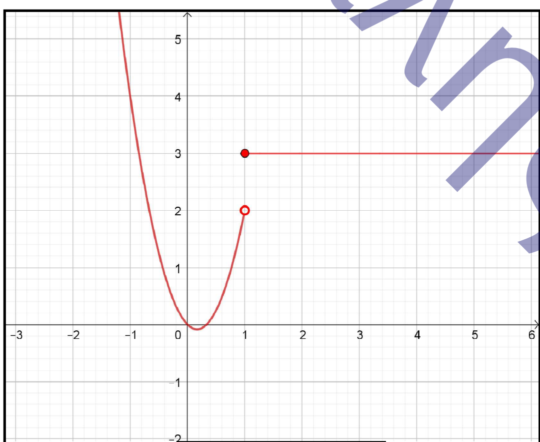
Συνάρτηση f



Συνάρτηση g



Συνάρτηση h



Συνάρτηση k

(Μονάδες 4)

Α4) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές **(Σ)** και ποιες λάθος **(Λ) :**

i) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο σημείο x_o, τότε και η συνάρτηση gof είναι συνεχής στο σημείο x_o.

ii) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο πραγματικό αριθμό στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0, τότε ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

iii) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

iv) Κάθε μη σταθερή συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα, θα έχει και σύνολο τιμών κλειστό διάστημα.

v) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το $\left(\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)\right)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha\eta\mu x + \beta x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

Β1) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$.

(Μονάδες 5)

Β2) Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$ iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x f\left(\dfrac{1}{x}\right) \right]$

(Μονάδες 3 + 3 + 3)

Β3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8^{f(x)+1} - 3^{f(x)+2} + 6^{f(x)}}{9^{f(x)} - 3^{f(x)} - 10^{f(x)}}$.

(Μονάδες 5)

Β4) Να υπολογίσετε τον $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lambda f(x) + \sigma\upsilon\nu x + x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{2x - \lambda\sigma\upsilon\nu x} = 5$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(-2)=-5$ και $f(1)=-3$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(x)+3x^2+x\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και
- $f(x)+x^2+x\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Γ1) Να αποδείξετε ότι ισχύει $-3x^2-x\leq f(x)\leq -x^2-x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

Γ2) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(|x|)}{συνx-1}$.

(Μονάδες 3 + 4)

Γ3) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,-\frac{1}{3})$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

(Μονάδες 4)

Γ4) Αν $x_1,x_2\in(-2,0)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[-2,0]$, τέτοιο ώστε $5f(\xi)=f(x_1)+f(x_2)-5$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x+1)-x$ και η συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση $(g(x)+1)(g(x)-1)=x\left[2g(x)+x+2\sqrt{x^2+1}\right]$ και $g(3)=-\sqrt{10}$.

Δ1) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A)=(0,+\infty)$.

(Μονάδες 6)

Δ2) Να αποδείξετε ότι $g(x)=-\sqrt{x^2+1}$.

(Μονάδες 6)

Δ3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{g(x)+1}+1=e^{(f\circ f)(x)+g(x)+1}$ είναι αδύνατη.

(Μονάδες 6)

Δ4) Θεωρούμε την ευθεία (ε) διχοτόμο του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου των αξόνων και το σημείο Δ(α, β) με $α,β\in\mathbb{R}$ και $α<β$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν συνευθειακά σημεία

- Α της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f,
- Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g,
- Γ της ευθείας (ε)

που έχουν τετμημένες στο διάστημα (α, β), με $AB\perp x'x$, τέτοια ώστε $λ_{ΓΔ}\cdot(AB)=-1$, όπου $λ_{ΓΔ}$ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΓΔ και (ΑΒ) η απόσταση των σημείων Α, Β.

(Μονάδες 7)

Καλή επιτυχία!