

ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ

ΘΕΜΑ Α

A1) Έστω μια συνεχής συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $g(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_g , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = \alpha$, $x = \beta$ ισούται με $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.

(Μονάδες 7)

A2) Έστω μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Ποια ή ποιες από τις παρακάτω τιμές δεν μπορεί να είναι τιμή του ολοκληρώματος $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$; (Μονάδες 2)

α) 2018 **β)** 0 **γ)** -2018

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 2)

(Μονάδες 4)

A3) Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σχέση που συμπληρώνει σωστά τα παρακάτω:

Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

α) $f'(x) \leq g'(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ **β)** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ **γ)** $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx \leq \int_{\beta}^{\alpha} g(x) dx$

δ) $F(x) \leq G(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, όπου F, G παράγουσες των f, g αντίστοιχα στο $[\alpha, \beta]$.

(Μονάδες 4)

A4) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

α) Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f, g ορισμένες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $g(x) \leq f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των C_f, C_g και

των ευθειών $x = \alpha$, $x = \beta$ είναι ίσο με $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - f(x)) dx$.

β) Έστω μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με συνεχείς παραγώγους, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx$.

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.

ε) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $f'(x) = F(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

B1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x g(2x) dx$.

(Μονάδες 6)

B2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{f(x)g(x) + x}{f^2(x) + 1}$ είναι περιττή

και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx$.

(Μονάδες 6)

B3) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f(x)}{2g^2(x) + g(x)} dx$.

(Μονάδες 7)

B4) Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(x) - \varphi(x) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) dx, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

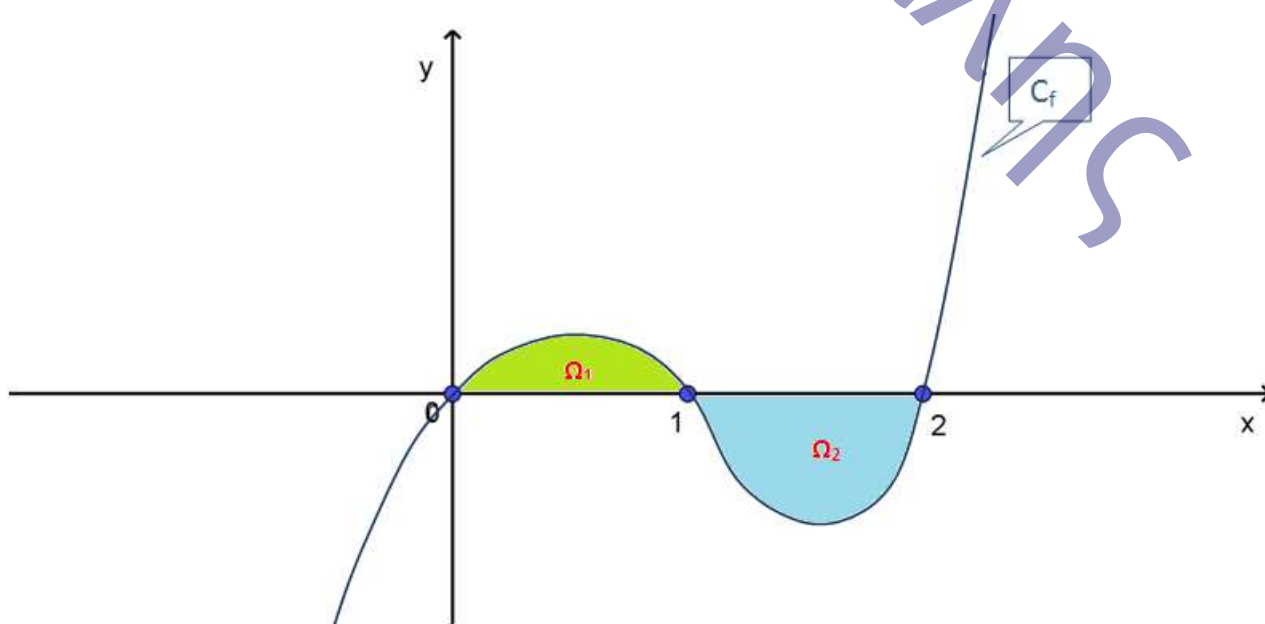
(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και για την οποία ισχύουν:

- $E(\Omega_2) = 2E(\Omega_1)$, όπου $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ τα εμβαδά των χρωματισμένων χωρίων Ω_1 , Ω_2 αντίστοιχα που φαίνονται στο σχήμα,
- $\int_0^2 f(x) dx = -\frac{1}{4}$.

Επίσης θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{αν } x \leq 1 \\ (2-x)\ln x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.



Γ1) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4}$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f και του άξονα $x'x$.

(Μονάδες 4)

Γ2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν μπορεί να είναι πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 6)

Γ3) Να υπολογίσετε το εμβαδόν E που περικλείεται μεταξύ των C_f και C_g .

(Μονάδες 6)

Γ4) Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0) = 0$,

(Μονάδες 4)

ii) στο διάστημα $[1,2]$ η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 , για το οποίο

$$\text{ισχύει } g(x_0) \geq 2 \ln 2 - \frac{5}{4}.$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση $f^3(x) + 2f(x) = 3 \ln x$, για κάθε $x > 0$.

Δ1) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, αντιστρέψιμη και ότι ισχύει $f(x) > 0$, για κάθε $x > 1$.

(Μονάδες 5)

Δ2) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_{e^{-a^2}}^{a^2+1} f(x) dx = 0$.

(Μονάδες 5)

Δ3) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f είναι η $f^{-1}(x) = e^{\frac{x^3+2x}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

Δ4) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (3x^3 + 2x) f^{-1}(x) dx$.

(Μονάδες 5)

Δ5) Αν η συνάρτηση G είναι μία αρχική συνάρτηση της f^{-1} , στο \mathbb{R} , με $G(1) = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \int_0^1 [(9x^2 + 6x + 2)G(x) - 2f^{-1}(x)] dx + 3 \int_1^e f(x) dx.$$

(Μονάδες 7)