ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ :ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ....

ΘΕΜΑ Α

Α1) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha)$.

(Μονάδες 7)

Α2) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια συνάρτηση ονομάζεται αρχική ή παράγουσα της f στο Δ;

(Μονάδες 4)

Α3) Έστω μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα [α, β], με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Ποια ή ποιες από τις παρακάτω τιμές δεν μπορεί να είναι τιμή του ολοκληρώματος $\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$; (Μονάδες 2)

α) 2022 **β)** 0 **γ)** –2022

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 2)

(Μονάδες 4)

Α4) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

α) Αν για τις συνεχείς συναρτήσεις f, g ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$ και α < β, τότε είναι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

β) Έστω μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα [α, β], με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$, τότε f(x) = 0, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

γ) Αν F είναι μία αρχική συνάρτηση της συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β] και ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την F στο διάστημα [α, β].

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα [α, β] και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

ε) Αν οι συναρτήσεις f, f', g είναι συνεχείς στο [α, β], τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx = [f(x)]_\alpha^\beta \cdot \left(\int_\alpha^\beta g(x)\,dx\right)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: [0,1] \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) = 1 + \dfrac{\int_0^1 f(x)dx}{(\ln 2 - 1)(x+1)}$, για κάθε $x \in [0,1]$
- $\int_0^{\frac{1}{2}} g^2(2x)dx = \int_0^1 xe^x g(x)dx + \dfrac{1-e^2}{8}$.

B1) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x \in [0,1]$.

(Μονάδες 5)

B2) Να αποδείξετε ότι $g(x) = xe^x$, $x \in [0,1]$.

(Μονάδες 7)

B3) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I_1 = \int_1^e g(\ln x)\,dx$, $I_2 = \int_0^1 \dfrac{xg(x)}{g'(x)}dx$.

(Μονάδες $3+3=6$)

B4) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g και της ευθείας x = 1.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} - ημx - α$.

Ισχύει ότι $\int_0^{f(0)} \left(e^x - x\right)dx = f(0)$.

Γ1) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και α = 1.

(Μονάδες 6)

Γ2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και αντιστρέψιμη.

(Μονάδες 3)

Γ3) Να αποδείξετε ότι ισχύει $3f(1) < 2f(1)f(2)\displaystyle\int_1^2 \dfrac{x}{e^x - \dfrac{x^2}{2} - ημx - 1}dx < 3f(2)$.

(Μονάδες 7)

Γ4) **α)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-2,0)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x_0) = -1$.

(Μονάδες 3)

β) Αν η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f είναι παραγωγίσιμη, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{0} f^{-1}(x)\,dx$, ως συνάρτηση του x_0.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε την κυρτή συνάρτηση $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- η εφαπτομένη της γραφικής παράστασής της στο σημείο της $A(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-x$
- $\int_0^4 f^2(x)\,dx+28=8f(4)+12f(0)-2\int_0^4 (x-3)f(x)f'(x)\,dx$
- $\int_0^4 \left[e^x\left(f(x)-f''(x)\right)\right]dx=2e^4-3$

Επίσης θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[0,4]\to\mathbb{R}$, με $g(x)=-x^2+\frac{9}{2}x+2$.

Δ1) Να αποδείξετε ότι $f(0)=2$, $f'(0)=-1$, $f(4)=4$ και $f'(4)=2$. **(Μονάδες 6)**

Δ2) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)\le\frac{1}{2}x+2\le g(x)$, για κάθε $x\in[0,4]$. **(Μονάδες 7)**

Δ3) Να αποδείξετε ότι ισχύει $6<\int_0^4 f(x)<12$. **(Μονάδες 7)**

Δ4) Θεωρούμε τα παρακάτω χωρία:

- Ω_1: «το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g.
- Ω_2: «το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A(0,2) και της εφαπτομένης της C_f στο σημείο B(4,4).

Αν ισχύει $\frac{E(\Omega_1)}{E(\Omega_2)}=\frac{3}{1}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω_1.

(Μονάδες 5)

Καλή επιτυχία!