

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η ανάμεσα στα $f(\alpha), f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.

(10 Μονάδες)

B. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται ένα προς ένα (1 - 1) ;

(5 Μονάδες)

Γ. Σημειώστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

α) Μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση είναι και αντιστρέψιμη.

β) Κάθε συνεχής συνάρτηση παίρνει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.

γ) Αν $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση,

τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right]$.

δ) Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(A) \cap B = \emptyset$, τότε δεν ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$.

ε) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε είναι και $\ell > 0$.

(10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} + \alpha, & x < 1 \text{ με } x \neq -1 \\ \beta, & x = 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{\sqrt{x^2 + 8} - 3}, & x > 1 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = \frac{3}{2}$.

(9 Μονάδες)

β) Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(8 Μονάδες)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = \frac{3}{2}$.

(8 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχή στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύουν:

- $f^3(x) + f(x) = x^3 + 6$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(-2, -1)$.

(6 Μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

(7 Μονάδες)

γ) Να αποδείξετε ότι $\ell = 1$.

(6 Μονάδες)

δ) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$.

(6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία

ισχύει $f^2(x) = (\ln|\eta\mu x|)^2$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \ln \frac{1}{2}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln|\eta\mu x|$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(6 Μονάδες)

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(5 Μονάδες)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -2011$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(7 Μονάδες)

δ) Αν $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια περιττή συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} g(x) = 1$, να

υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [f(x) \cdot g(x)]$.

(7 Μονάδες)