ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ....

ΘΕΜΑ Α

Α1) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και ο x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

(Μονάδες 7)

Α2) Να διατυπώσετε το πρώτο Θεώρημα de l' Hospital για όρια της μορφής $\frac{0}{0}$.

(Μονάδες 4)

Α3) Πότε το σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

(Μονάδες 4)

Α4) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

α) Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1 όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $f(x_1) \neq f(x_2)$, τότε $x_1 \neq x_2$.

β) Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \ell$, τότε συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\ell$.

γ) Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

δ) Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, τότε πάντα η f παίρνει μία μέγιστη τιμή και μία ελάχιστη τιμή στο διάστημα Δ.

ε) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$.

Β1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

Β2) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο Α(0, 1).

(Μονάδες 7)

Β3) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=xe^{x}$. Να ορίσετε τη σύνθεση της g με την f.

(Μονάδες 7)

Β4) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της συνάρτηση.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)e^{f(x)}=e^{f(x)}+2xe^{x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ1) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\ln(x^{2}+1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Γ2) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

(Μονάδες 5)

Γ3) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\xi\left[f'(\xi)+1\right]+\ln\left(\xi^{2}+1\right)=f'(\xi)$.

(Μονάδες 5)

Γ4) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)-\alpha\right)^{2}\left(f(x)-\alpha-2\right)^{2}$, με $\alpha>0$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά κ, λ, $\mu\in\mathbb{R}$ με $0<\kappa<\lambda<\mu$ τέτοια, ώστε $f(\kappa)=\alpha$, $f(\lambda)=\alpha+1$ και $f(\mu)=\alpha+2$.

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει δύο τοπικά ελάχιστα, ένα τοπικό μέγιστο και να προσδιορίσετε τις τιμές των ακροτάτων.

(Μονάδες 6)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ e^{x^2}, & x\geq 0\end{cases}$ και η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(e^{F(x)}+1\right)-F(x)$, όπου F μία παράγουσα συνάρτηση της συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$.

Δ1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 3)

Δ2) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx < e+\frac{2}{3}$.

(Μονάδες 4)

Δ3) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ώστε να ισχύει $\int_{f^2(\alpha^2)}^{f^2(\ln(\alpha^2+1))} f(x)dx=0$.

(Μονάδες 6)

Δ4) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $+\infty$.

(Μονάδες 6)

Δ5) Να λύσετε την εξίσωση $\int_0^1 F(x)\,dx + e^{f(x)} = f(x)+\frac{3-e}{2}+F(1)$.

(Μονάδες 6)

Καλή επιτυχία!